

METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<https://marekzaionc.staff.tcs.uj.edu.pl/>



Wykłady 9 i 10 w dniach 30.10 i 5.11.2024

Obrazy i przeciwobrazy zbiorów

Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $A \subset X$ i $B \subset Y$.

Definicja

$$\vec{f}(A) := \{y \in Y : \exists_{x \in A} f(x) = y\}$$

$$\vec{f}^{-1}(B) := \{x \in X : \exists_{y \in B} f(x) = y\}$$

Własności obrazu

Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $A \subset X$ i $B \subset X$. Niech $\kappa \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

Fakt

$$\vec{f}(A \cup B) = \vec{f}(A) \cup \vec{f}(B) \quad (1)$$

$$\vec{f}(A \cap B) \subset \vec{f}(A) \cap \vec{f}(B) \quad (2)$$

$$\vec{f}(A) \setminus \vec{f}(B) \subset \vec{f}(A \setminus B) \quad (3)$$

$$\vec{f}\left(\bigcup \kappa\right) = \bigcup \{\vec{f}(A) : A \in \kappa\} \quad (4)$$

$$\vec{f}\left(\bigcap \kappa\right) \subset \bigcap \{\vec{f}(A) : A \in \kappa\} \quad (5)$$

Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $A \subset Y$ i $B \subset Y$. Niech $\kappa \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$.

Fakt

$$\vec{f}^{-1}(A \cup B) = \vec{f}^{-1}(A) \cup \vec{f}^{-1}(B) \quad (6)$$

$$\vec{f}^{-1}(A \cap B) = \vec{f}^{-1}(A) \cap \vec{f}^{-1}(B) \quad (7)$$

$$\vec{f}^{-1}\left(\bigcup \kappa\right) = \bigcup \{\vec{f}^{-1}(A) : A \in \kappa\} \quad (8)$$

$$\vec{f}^{-1}\left(\bigcap \kappa\right) = \bigcap \{\vec{f}^{-1}(A) : A \in \kappa\} \quad (9)$$

Monotoniczność obrazu i przeciwobrazu

Fakt

Niech $f : X \rightarrow Y$. Funkcje

$$\vec{f} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$\vec{f}^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

są monotoniczne to znaczy takie że,

$$x_1 \subset x_2 \Rightarrow \vec{f}(x_1) \subset \vec{f}(x_2) \quad (10)$$

$$y_1 \subset y_2 \Rightarrow \vec{f}^{-1}(y_1) \subset \vec{f}^{-1}(y_2) \quad (11)$$

Twierdzenie Knastera-Tarskiego



Bronisław Knaster
(Warszawa 1893- Wrocław 1980)



Alfred Tarski
(Warszawa 1901 - Berkeley 1983)

Twierdzenie Knastera - Tarskiego

Definicja

$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ jest monotoniczna ze względu na inkluzje gdy:

$$x \subset y \Rightarrow f(x) \subset f(y)$$

Definicja

Zbiór $x_0 \subset X$ jest punktem stałym funkcji $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ gdy $f(x_0) = x_0$.

Definicja

Zbiór $x_0 \subset X$ jest najmniejszym punktem stałym funkcji $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ gdy

- 1. $f(x_0) = x_0$*
- 2. jeżeli $f(y) = y$ to $x_0 \subset y$*

Definicja

Zbiór $x_0 \subset X$ jest największym punktem stałym funkcji $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ gdy

- 1. $f(x_0) = x_0$*
- 2. jeżeli $f(y) = y$ to $y \subset x_0$*

Twierdzenie Knastera - Tarskiego

Twierdzenie

*[Knaster - Tarski] Każde monotoniczne odwzorowanie
 $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ posiada najmniejszy i największy punkty stałe.*

Definicja

Rodzinę zbiorów $\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ nazywamy skierowaną gdy

$$\forall_{A,B \in \alpha} \exists_{C \in \alpha} A \subset C \text{ i } B \subset C$$

Definicja

*Funkcje $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ nazywamy ciągłą gdy
 $f(\bigcup \alpha) = \bigcup \{f(x) : x \in \alpha\}$ dla każdej rodziny skierowanej α .*

Tw Knastera-Tarskiego dla ciągłych

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ jest monotoniczna i jej najmniejszy punkt stały jest postaci $\bigcup \{f^i(\emptyset) : i \in \mathbb{N}\}$.

Lemat Banacha



Stefan Banach
(Kraków 1892- Lwów 1945)

Lemat

[Banach] Niech $f : X \rightarrow Y$ oraz $g : Y \rightarrow X$. Istnieje rozkład $\{A_1, A_2\}$ zbioru X oraz rozkład $\{B_1, B_2\}$ zbioru Y takie że:

1. $\overrightarrow{f}(A_1) = B_1$
2. $\overrightarrow{g}(B_2) = A_2$