

# METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<https://marekzaionc.staff.tcs.uj.edu.pl/>



Wykłady 7 i 8 w dniach 23.10.2024 i 29.10.2024

## Definicja

*Relacja  $R \subset X \times X$  nazywamy relacją równoważności o polu  $X$  jeżeli:*

- ▶ *zawiera relacje  $1_X$  (zwrotność  $R$ )*
- ▶  *$R^{-1} \subset R$  (symetria  $R$ )*
- ▶  *$R \circ R \subset R$  (przechodniość  $R$ )*

## Klasy równoważności (abstrakcji)

### Definicja

*Niech  $R$  będzie relacją równoważności o polu  $X$ . Klasą równoważności elementu  $x \in X$  jest zbiór*

$$[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

### Definicja

*Zbiór klas równoważności relacji  $R$  oznaczamy przez  $X/R$ .*

## Klasy równoważności (abstrakcji)

Twierdzenie

*Niech  $R$  będzie relacją równoważności o polu  $X$ . Następujące warunki są równoważne*

1.  $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$
2.  $[x]_R = [y]_R$
3.  $(x, y) \in R$

## Przecięcie relacji równoważności

### Twierdzenie

*Niech  $\kappa \neq \emptyset$  będzie pewną rodziną relacji równoważności o tym samym polu  $X$ . Mamy że:*

- ▶  $\bigcap \kappa$  jest relacją równoważności
- ▶  $[x]_{\bigcap \kappa} = \bigcap \{[x]_R : R \in \kappa\}$

## Przecięcie relacji równoważności

W szczególności przecięcie wszystkich relacji równoważności o polu  $X$  daje  $1_X$ . Jest ona najsilniejszą relacją równoważności. Najłabszą jest  $X^2$ .

## Definicja

Niech  $X \neq \emptyset$ . Rodzinę  $r \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  nazywamy rozkładem zbioru  $X$  gdy

1.  $\forall C \in r \quad C \neq \emptyset$
2.  $\bigcup r = X$
3.  $(C \in r \wedge D \in r \wedge C \neq D) \Rightarrow C \cap D = \emptyset$

Lemat

*Dla relacji równoważności  $R$  o polu  $X$  zbiór  $X/R$  jest rozkładem  $X$ .*

## Definicja

Niech  $r$  będzie rozkładem zbioru  $X$ . Definiujemy relacje  $R_r \subset X \times X$  następująco:

$$(x, y) \in R_r \text{ wtw } \exists_{C \in r} x \in C \wedge y \in C$$

## Lemat

Relacja  $R_r$  jest:

1. równoważnością
2.  $X/R_r = r$

## Definicja

*Niech  $\alpha$  będzie rodziną relacji o polu  $X$ , czyli niech  $\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X^2))$*

*Rodzina  $\alpha$  jest zamknięta na przecięcia gdy*

- 1.  $X^2 \in \alpha$*
- 2. jeżeli  $\emptyset \neq \alpha' \subset \alpha$  to  $\bigcap \alpha' \in \alpha$*

## Definicja

*Relacja  $S \subset X^2$  jest domknięciem relacji  $R \subset X^2$  w klasie relacji  $\alpha$  gdy:*

- 1.  $R \subset S$*
- 2.  $S \in \alpha$*
- 3. jeżeli  $R \subset T$  oraz  $T \in \alpha$  to  $S \subset T$*

Fakt

*Domknięcie relacji (w dowolnej klasie) jeżeli istnieje to jest jedyne.*

Twierdzenie

*Następujące warunki są równoważne:*

- 1. Klasa relacji  $\alpha$  jest domknięta na przecięcia.*
- 2. Każda relacja ma domknięcie w klasie relacji  $\alpha$ .*

Przykład

*Domknięciem zwrotnym relacji  $R \subset X \times X$  jest  $R \cup 1_X$ .*

Przykład

*Domknięciem symetrycznym relacji  $R \subset X \times X$  jest  $R \cup R^{-1}$ .*

Przykład

*Domknięciem przechodnim relacji  $R \subset X \times X$  jest*  
 $R^* = \bigcup \{R^i : i > 0\}.$

## Definicja

Niech  $f \subset X \times Y$ . Relację  $f \subset X \times Y$  nazywamy funkcją gdy

1.  $\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} (x, y) \in f$
2. jeżeli  $(x, y) \in f$  oraz  $(x, y') \in f$  to  $y = y'$ .

## Definicja

- ▶ Jeżeli  $f \subset X \times Y$  jest funkcją to oznaczamy to przez  $f : X \rightarrow Y$ .
- ▶  $Y^X = \{f \subset X \times Y : f \text{ jest funkcją}\}$ .
- ▶ Jeżeli  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $x \in X$  to przez  $f(x)$  oznaczamy jedyny element  $y \in Y$  taki że  $(x, y) \in f$ .

Lemat

*Złożenie funkcji jest funkcją.*

Lemat

*Jeżeli  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $g : Y \rightarrow Z$  to  $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ .*

Lemat

*Niech  $f : X \rightarrow Y$  oraz  $g : X \rightarrow Y$ .*

*$f = g$  wtw  $\forall_{x \in X} f(x) = g(x)$ .*

## Definicja

*Funkcje  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy iniekcją gdy  $f(x_1) = f(x_2)$  implikuje że  $x_1 = x_2$ .*

## Definicja

*Funkcje  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy surjekcją gdy  $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} y = f(x)$ .*

## Definicja

*Funkcje  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy bijekcją gdy jest jednocześnie iniekcją i surjekcją.*

Lemat

*Złożenie iniekcji jest iniekcją. Złożenie surjekcji jest surjekcją.*

*Złożenie bijekcji jest bijekcją.*

Lemat

*Jeżeli  $f : X \rightarrow Y$  jest bijekcją to*

- 1.  $f^{-1} \subset Y \times X$  jest funkcją.*
- 2.  $f^{-1}$  jest bijekcją.*
- 3.  $f \circ f^{-1} = 1_Y$ .*
- 4.  $f^{-1} \circ f = 1_X$ .*

Lemat

[o faktoryzacji] Niech  $f : X \rightarrow Y$ . Istnieje taki zbiór  $Z$  i funkcje  $g : X \rightarrow Z$  oraz  $h : Z \rightarrow Y$  takie że:

1.  $g$  jest surjekcją.
2.  $h$  jest iniekcją.
3.  $f = h \circ g$

Definicja

*Dla zbioru  $X$  produktem  $\mathbb{P}X$  nazywamy zbiór*

$$\{f \in \left(\bigcup X\right)^X : \forall_{x \in X} f(x) \in x\}$$

Fakt

*Dla zbiorów  $X_1 \neq X_2$  istnieje naturalna bijekcja pomiędzy iloczynem Kartezjańskim  $X_1 \times X_2$  a produktem  $\mathbb{P}\{X_1, X_2\}$ .*

## Rodzina indeksowana i produkt tej rodziny

Rodzina indeksowana

Rodziną indeksowaną  $\{A_t\}_{t \in T}$  nazywamy funkcję  $B : T \rightarrow A$ .

Stosujemy zapis  $A_t = A(t)$ .

Produktem  $\prod_{t \in T} A_t$  rodziny indeksowanej  $\{A_t\}_{t \in T}$  nazywamy zbiór funkcji

$$\{f : T \rightarrow \bigcup \{A_t : t \in T\} : \forall_{t \in T} f(t) \in A_t\}$$