

METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<https://marekzaionc.staff.tcs.uj.edu.pl/>



Wykłady 5 i 6 w dniach 16 i 22 października 2024

Definiowanie przez schemat

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists z \forall p \ (p \in z \Leftrightarrow \varphi)$$

φ jest formułą w której zmienna z nie występuje (lub nie występuje w sposób wolny). Jedynymi zmiennymi wolnymi w φ są $x_1, \dots, x_n$ oraz p . Wtedy zawsze dla ustalonych $x_1, \dots, x_n$ definiowany zbiór z jest wyznaczony w sposób jednoznaczny. Formuła φ jest definicją zbioru z .

AKSJOMAT

$$\forall x \exists z \forall p \ (p \in z \Leftrightarrow p \subset x)$$

Potęga zbioru x jest jedyna i oznaczamy ją przez $\mathcal{P}(x)$. Na potęgę zbioru x również używana jest notacja 2^x .

Schemat aksjomatu wyróżniania

SCHEMAT AKSJOMATU

Niech φ będzie formułą o zmiennych wolnych którymi mogą być jedynie x oraz p .

$$\forall x \exists z \forall p (p \in z \Leftrightarrow \varphi \wedge p \in x)$$

Oznaczenie

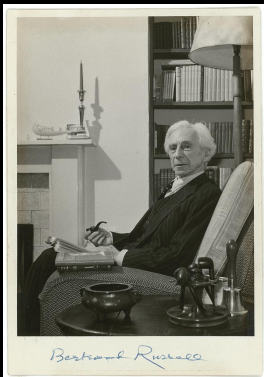
Dla zbioru x i formuły φ przez

$$\{p \in x : \varphi\}$$

oznaczamy te elementy zbioru x które spełniają φ .

Paradoks Russell'a

Definicja zbioru Russell'a $R = \{x : x \notin x\}$



Bertrand Russel (1872 - 1970)

Definicja

$$\bigcap x := \{p \in \bigcup x : \forall z (z \in x \Rightarrow p \in z)\}$$

Fakt

Dla niepustej rodziny x

$$p \in \bigcap x \Leftrightarrow \forall_{z \in x} p \in z$$

Lemat

Przecięcie niepustej rodziny x jest największym ze względu na inkluzję zbiorem zawartym w każdym elemencie rodziny x .

Lemat

Przecięcie niepustych rodzin jest antymonotoniczne

$$(x \subset y) \Rightarrow (\bigcap y \subset \bigcap x)$$

Przecięcie dwóch zbiorów

Oznaczenie

$$x \cap y := \bigcap \{x, y\}$$

Fakt

$$p \in x \cap y \text{ wtw } p \in x \wedge p \in y$$

Własności przecięcia

$$x \cap y = y \cap x \quad (1)$$

$$x \cap \emptyset = \emptyset \quad (2)$$

$$x \cap x = x \quad (3)$$

$$x \supset x \cap y \quad (4)$$

$$y \supset x \cap y \quad (5)$$

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \quad (6)$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \quad (7)$$

Definicja

Dwa zbiory są rozłączne gdy ich przecięcie jest puste.

Fakt

$y \subset \bigcup x$ dla każdego $y \in x$

Fakt

$y \supset \bigcap x$ dla każdego $y \in x$

Definicja

$$x \setminus y := \{z \in x : z \notin y\}$$

Fakt

$$x \setminus (x \setminus y) = y \cap x \quad (8)$$

$$x \setminus (y \cup z) = (x \setminus y) \cap (x \setminus z) \quad (9)$$

$$x \setminus y = y \setminus x \Rightarrow x = y \quad (10)$$

Lemat

$x \setminus y$ jest największym ze względu na inkluzję zbiorem zawartym w x i rozłącznym z y .

Lemat

Niech $a, b \subset x$. Następujące warunki są równoważne.

$$a \subset b \quad (11)$$

$$a \cap b = a \quad (12)$$

$$a \cup b = b \quad (13)$$

$$(x \setminus a) \cup b = x \quad (14)$$

$$a \cap (x \setminus b) = \emptyset \quad (15)$$

Aksjomat podstawiania

$$\forall x \forall y \forall z \ (x = y \wedge x \in z \Rightarrow y \in z)$$

Lemat o podstawianiu równych

Dla dowolnego zdania φ
jeżeli $\varphi(x)$ oraz $x = y$ to $\varphi(y)$

Definicja

Niech x oraz y będą zbiorami. Przez parę uporządkowaną (x, y) rozumiemy zbiór

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Własności pary uporządkowanej

Twierdzenie

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Iloczyn kartezjański (produkt)



Portret René Descartes (1596 - 1650) autorstwa Fransa Halsy (1648).
Motto: "*Cogito ergo sum*".

Iloczyn kartezjański (produkt)

Definicja

Niech x, y będą zbiorami. Iloczynem kartezjańskim $x \times y$ nazywamy zbiór

$$\{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)) : \exists_{a \in x} \exists_{b \in y} (a, b) = z\}$$

Własności iloczynu kartezjańskiego

Fakt

$$x \times \emptyset = \emptyset \quad (16)$$

$$x \times (y \cup z) = (x \times y) \cup (x \times z) \quad (17)$$

$$x \times (y \cap z) = (x \times y) \cap (x \times z) \quad (18)$$

$$x \times (y \setminus z) = (x \times y) \setminus (x \times z) \quad (19)$$

Lemat

Produkt kartezjański $\times$ jest monotoniczny ze względu na każdą współrzędną osobno to znaczy:

$$x \subset y \Rightarrow (x \times z) \subset (y \times z) \quad (20)$$

$$x \subset y \Rightarrow (z \times x) \subset (z \times y) \quad (21)$$

Definicja

Relacją nazywamy każdy podzbiór iloczynu $x \times y$

Operacje na relacjach:

Definicja

Niech $R \subset A \times B$ oraz $S \subset B \times C$.

$$S \circ R := \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in R\}$$

$$R_L := \{x \in A : \exists y \in B (x, y) \in R\}$$

$$R_P := \{y \in B : \exists x \in A (x, y) \in R\}$$

Własności operacji na relacjach

Niech relacja $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$ oraz $T \subset C \times D$.

Fakt

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R \quad (22)$$

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} \quad (23)$$

$$R \subset R_L \times R_P \quad (24)$$

$$(S \circ R)_L \subset R_L \quad (25)$$

$$(S \circ R)_P \subset S_P \quad (26)$$

$$(R^{-1})_L = R_P \quad (27)$$

Własności operacji na relacjach cd.

Dla $R \subset B \times C, S \subset B \times C, T \subset A \times B$ zachodzą następujące fakty.

Fakt

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \quad (28)$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad (29)$$

$$(R^{-1})^{-1} = R \quad (30)$$

$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T) \quad (31)$$

$$(R \cap S) \circ T \subset (R \circ T) \cap (S \circ T) \quad (32)$$

Definicja

Dla zbioru X definiujemy relacja $1_X \subset X \times X$ jako
$$\{z \in X \times X : \exists_{x \in X} (x, x) = z\}$$

Definicja

Relacja $R \subset X \times X$ nazywamy relacją równoważności o polu X jeżeli:

- ▶ *zawiera relacje 1_X (zwrotność R)*
- ▶ *$R^{-1} \subset R$ (symetria R)*
- ▶ *$R \circ R \subset R$ (przechodniość R)*

Klasy równoważności (abstrakcji)

Definicja

Niech R będzie relacją równoważności o polu X . Klasą równoważności elementu $x \in X$ jest zbiór

$$[x]_R := \{y \in X : (x, y) \in R\}$$

Definicja

Zbiór klas równoważności relacji R oznaczamy przez X/R .

Klasy równoważności (abstrakcji)

Twierdzenie

Niech R będzie relacją równoważności o polu X . Następujące warunki są równoważne

1. $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$
2. $[x]_R = [y]_R$
3. $(x, y) \in R$