

METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



Wykłady 3 i 4 w dniu 9 i 15 października 2024

W rachunku kwantyfikatorów wchodzimy w strukturę formuł.

$$\forall x \ p(x)$$

$$\exists x \ p(x)$$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

$$\neg(\forall x \ p(x)) \Leftrightarrow \exists x \ \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \ p(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$

Niech $p(x)$ i $q(x)$ będą formami zdaniowymi

$\forall_{x:p(x)} q(x)$ oznacza $\forall_x (p(x) \rightarrow q(x))$

$\exists_{x:p(x)} q(x)$ oznacza $\exists_x (p(x) \wedge q(x))$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów ograniczonych

$$\neg(\forall_{x:p(x)} q(x)) \Leftrightarrow \exists_{x:p(x)} \neg q(x)$$

$$\neg(\exists_{x:p(x)} q(x)) \Leftrightarrow \forall_{x:p(x)} \neg q(x)$$

Alfabet symboli:

- symbole predykatywne $p, q, \dots$
- symbole funkcyjne $f, g, \dots$
- stałe $a, b, c, \dots$
- zmienne $x, y, z, \dots$

Termy:

- 1 zmienne i stałe są termami
- 2 jeżeli $t_1, \dots, t_n$ są termami i f jest n argumentowym symbolem funkcyjnym to $f(t_1, \dots, t_n)$ jest termem.

- 1 Formuły atomowe: jeżeli $t_1, \dots, t_n$ są termami i p jest n argumentowym symbolem predykatywnym to $p(t_1, \dots, t_n)$ jest formułą atomową.
- 2 formuły atomowe są formułami.
- 3 jeżeli φ, ψ są formułami to
 - $(\varphi \Rightarrow \psi)$
 - $\varphi \wedge \psi$
 - $\varphi \vee \psi$
 - $\neg \varphi$są formułami.
- 4 jeżeli φ jest formułą i x zmienną to
- 5 $\forall_x \varphi$ oraz $\exists_x \varphi$ są formułami.

Język arytmetyki

Alfabet języka arytmetyki to:

- symbol predykatywny $=$
- symbole funkcyjne $s, +, \times$
- stała 0
- zmienne $x, y, z, \dots$

Aksjomaty fragmentu arytmetyki zwanego teorią $\mathbb{Q}$.

- 1 $\forall_{x,y} s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$
- 2 $\forall_x 0 \neq s(x)$
- 3 $\forall_x x \neq 0 \Rightarrow (\exists_y x = s(y))$
- 4 $\forall_x x + 0 = x$
- 5 $\forall_{x,y} x + s(y) = s(x + y)$
- 6 $\forall_x x \times 0 = 0$
- 7 $\forall_{x,y} x \times s(y) = x \times y + x$

Język teorii mnogości

Alfabet języka teorii mnogości to:

- symbole predykatywne $\in$
- symbole funkcyjne – BRAK
- stałe BRAK
- zmienne $x, y, z, \dots$

Teoria mnogości - aksjomaty

$\in$

$$x \in y$$

Definicja równości

$$x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

Definicja zawierania, inkluzji

$$x \subset y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$$

Lemat

$$x = y \Leftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x$$

$$(x \subset y) \wedge (y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$$

$$\begin{array}{ll} x \notin y & x \ni y \\ x \neq y & x \supset y \\ x \not\subset y & x \not\supset y \\ x \subsetneq y & x \supsetneq y \end{array}$$

AKSJOMAT

$$\exists x \forall z \quad z \notin x$$

Lemat

*Każdy zbiór pusty jest podzbiorem
każdego zbioru.*

Fakt

Zbiór pusty jest tylko jeden. Oznaczamy go $\emptyset$.

AKSJOMAT

Aksjomat pary nieuporządkowanej

$$\forall x \forall y \exists z \forall p (p \in z \Leftrightarrow p = x \vee p = y)$$

Lemat

Dla każdego x i dla każdego y para tych elementów jest jedyna. Oznaczamy ją $\{x, y\}$.

Lemat

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

Oznaczenie

$$\{x\} := \{x, x\}$$

Aksjomat sumy (zbiory można sumować)

AKSJOMAT

$$\forall x \exists z \forall p \ (p \in z \Leftrightarrow \exists y (y \in x \wedge p \in y))$$

Jedyność sumy

Suma zbioru x jest jedyna i oznaczamy ją $\cup x$.

Lemat

Suma zbioru jest najmniejszym ze względu na inkluzję zbiorem zawierającym wszystkie swoje elementy.

Lemat

Suma jest monotoniczna, co oznacza

$$x \subset y \text{ to } \cup x \subset \cup y$$

Lemat

$$\bigcup \emptyset = \emptyset \quad (1)$$

$$\bigcup \{\emptyset\} = \emptyset \quad (2)$$

Suma dwóch zbiorów

suma dwóch

$$x \cup y := \cup\{x, y\}$$

Fakt

$$(p \in x \cup y) \Leftrightarrow (p \in x) \vee (p \in y)$$

Fakt

$$x \cup y = y \cup x \quad (3)$$

$$x \cup \emptyset = x \quad (4)$$

$$x \cup x = x \quad (5)$$

$$x \subset x \cup y \quad (6)$$

$$y \subset x \cup y \quad (7)$$

Definicja trójek, czwórek

$$\{x, y, z\} := \{x, y\} \cup \{z\}$$