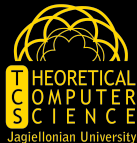


METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



Wykład 24 i 25 w dniu 22 i 27 stycznia 2025

Liczby porządkowe

Twierdzenie

Każde dwie liczby porządkowe, jeżeli są podobne to są identyczne.

Twierdzenie

Dla każdych dwóch liczb porządkowych, jedna jest podzbiorem drugiej.

Twierdzenie

Każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany inkluzją.

Elementy graniczne w zbiorach dobrze uporządkowanych

Definicja

Element granicznym to taki który nie jest następnikiem.

Elementy graniczne w zbiorach dobrze uporządkowanych

Twierdzenie

Jeżeli $x_0 \in D$ jest elementem granicznym wtw dla każdego $y < x_0$ istnieje $z \in D$ takie że $y < z < x_0$.

Elementy graniczne w zbiorach dobrze uporządkowanych

Twierdzenie

$x_0 \in D$ jest elementem granicznym wtw

$$\mathcal{P}_D(x_0) = \bigcup \{ \mathcal{P}_D(y) : y < x_0 \}$$

Twierdzenie

$x_0 \in D$ jest następnikiem $\overline{x_0}$ wtw $\mathcal{P}_D(x_0) = \mathcal{P}_D(\overline{x_0}) \cup \{ \overline{x_0} \}$

Elementy graniczne w liczbach porządkowych

Antynomia Burali-Forti

Twierdzenie (Antynomia Burali-Forti)

Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

Aksjomat zastępowania

Dla dowolnej formuły φ nie posiadającej zmiennych wolnych innych niż w i v następująca formuła jest prawdą

$$\begin{aligned} & (\forall w \exists u \forall v \varphi(w, v) \implies u = v) \implies \\ & (\forall x \exists y \forall v (v \in y \iff \exists w w \in x \wedge \varphi(w, v))) \end{aligned}$$

Aksjomat zastępowania

Nieformalnie, formuła φ przyporządkowuje jednoznacznie pewnym zbiorom inne zbioru. Jest funkcją częściową.

Pod tym warunkiem istnieje zbiór obiektów przyporządkowany obiektom z danego zbioru x . Zupełnie nieformalnie możemy stwierdzić, że dla zdefiniowanej formułą częściowej funkcji, jeśli jako dziedzinę weźmiemy dowolny zbiór x to przeciwdziedzina tej funkcji również jest zbiorem.

Twierdzenie

Każdy zbiór dobrze uporządkowany jest podobny do pewnej liczby porządkowej.

Liczby porządkowe

1. Dowód nie wprost. Niech $(X, \leq)$ nie będzie podobny do żadnej liczby porządkowej.
2. Każda liczba porządkowa jest podobna do pewnego odcinka początkowego $(X, \leq)$.
3. Niech $\phi(o, p)$ będzie formułą o zmiennych wolnych o, p która będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy o jest dobrym porządkiem, p jest liczbą porządkową i o jest podobne do p . Wiemy, że takie p jest jedyne.
4. Z aksjomatu zastępowania istnieje zatem zbiór liczb porządkowych podobnych do przedziałów początkowych X .
5. Istnieje zatem zbiór wszystkich liczb porządkowych, sprzeczność.

Elementy graniczne i następniki

Definicja

Niech $(D, \leq)$ będzie porządkiem. Przez $\mathcal{P}_D(x)$ oznaczamy odcinek początkowy o końcu w x .

Definicja

W dobrym porządku elementem granicznym nazywamy element, który nie jest następnikiem.

Twierdzenie Zermelo

Twierdzenie

Każdy zbiór da się dobrze uporządkować

(Idea dowodu zaczerpnięta z notatek z wykładu prof. Pawła Urzyczyna):

Dowód: Niech A będzie niepustym zbiorem. Niech $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ będzie funkcją wyboru dla A .

Definicja

Definicja: Zbiór dobrze uporządkowany $(D, \leq_D)$ będący podzbiorem A ma porządek zgodny z funkcją f gdy dla dowolnego $x \in D$ zachodzi $x = f(A \setminus \mathcal{P}_D(x))$

Twierdzenie Zermelo

Pokazujemy, że istnieją w A podzbiory dobrze uporządkowane porządkami zgodnymi z f .

Własność 1. Pokażemy, że dla każdych dwóch nie równych sobie zbiorów dobrze uporządkowanych $(D_1, \leq_{D_1})$ i $(D_2, \leq_{D_2})$ o porządkach zgodnych z funkcją wyboru f jeden jest podzbiorem drugiego a porządki też się zawierają.

Twierdzenie Zermelo

Własność 2. Niech F będzie sumą wszystkich dobrych porządków na A zgodnych z f . Niech $\leq_F$ będzie sumą wszystkich dobrych relacji zgodnych z f . Dowodzimy, że $\leq_F$ jest relacją dobrego porządku i że jest zgodna z f .

Własność 3. Dowodzimy nie wprost, że $F = A$.

Lemat Kuratowskiego Zorna



Kazimierz Kuratowski
(Warszawa 1893-1980)



Max August Zorn
(1906-Krefeld, Niemcy - Bloomington, 1993)

Lemat Kuratowskiego - Zorna

Lemat (Kuratowskiego -Zorna)

Założenia: $(X, \leq)$ jest porządkiem w którym każdy łańcuch ma majorantę.

Teza: Istnieje w $(X, \leq)$ element maksymalny.

Lemat Kuratowskiego - Zorna, dowód

(Idea dowodu zaczerpnięta z notatek z wykładu prof. Pawła Urzyczyna)

Dowód: Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym, takim, w którym każdy łańcuch ma majorantę. Niech $\preceq$ będzie dobrym porządkiem na A uzyskanym dzięki twierdzeniu Zermelo takim, że w którym nie ma elementu ostatniego.

Dla każdego $a \in A$ definiujemy zbiór $L_a \subset A$, tak aby spełnione były następujące dwa postulaty:

1. $L_a \subset \{x \in A : x \prec a\}$.
2. L_a jest łańcuchem ze względu na porządek $\leq$.

Lemat Kuratowskiego - Zorna, dowód

Zbiory L_a definiujemy indukcyjnie ze względu na dobry porządek $\prec$.
Dla elementu a najmniejszego w sensie $\preceq$ mamy $L_a = \emptyset$.

Założmy, że zbiory L_b są zdefiniowane dla wszystkich $b \prec a_0$.

Definiujemy L_{a_0} następująco:

1. gdy a_0 jest graniczny to $L_{a_0} = \bigcup \{L_b : b \prec a\}$,
2. gdy a_0 jest następnikiem $\overline{a_0}$ oraz $L_{\overline{a_0}} \cup \{\overline{a_0}\}$ jest łańcuchem w $\leq$ to $L_{a_0} = L_{\overline{a_0}} \cup \{\overline{a_0}\}$
3. gdy a_0 jest następnikiem $\overline{a_0}$ oraz $L_{\overline{a_0}} \cup \{\overline{a_0}\}$ nie jest łańcuchem w $\leq$ to $L_{a_0} = L_{\overline{a_0}}$

Lemat Kuratowskiego - Zorna, dowód

Pokazujemy że tak zdefiniowany zbiór L_{a_0} jest łańcuchem ze względu na $\leq$.

Definiujemy $L = \bigcup \{L_a : a \in A\}$. Pokazujemy że L jest łańcuchem, zatem posiada majorantę c . Pokazujemy, że c jest maksymalne względem $\leq$ w A .