

METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



Wykład 22 i 23 w dniu 8 i 14 stycznia 2025

Zbiory dobrze uporządkowane

Definicja

Porządek $(X, \leq)$ nazywamy dobrym gdy każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.

Zbiory dobrze uporządkowane

Fakt

W dobrym porządku, każdy element za wyjątkiem największego posiada następnik.

Zbiory dobrze uporządkowane

Fakt

W dobrym porządku każdy przedział początkowy właściwy jest postaci $\{x \in X : x < x_0\}$ dla pewnego $x_0 \in X$.

Indukcja pozaskończona

Definicja

Niech $(X, \leq)$ będzie liniowym porządkiem. W $(X, \leq)$ obowiązuje ZASADA INDUKCJI jeżeli dla dowolnego zbioru Z takiego że:

1. $Z \subset X$
2. $Z \neq \emptyset$
3. jeżeli $\{y \in X : y < x\} \subset Z$ to $x \in Z$

zachodzi że $Z = X$

Indukcja pozaskończona

Twierdzenie

W dobrym porządku obowiązuje zasada indukcji.

Indukcja pozaskończona

Twierdzenie

Niech $(X, \leq)$ będzie liniowym porządkiem. W $(X, \leq)$ istnieje element najmniejszy. W $(X, \leq)$ obowiązuje zasada indukcji.

TEZA: $(X, \leq)$ jest porządkiem dobrym.

Indukcja pozaskończona

Lemat

$(X, \leq)$ jest porządkiem dobrym oraz $f : X \rightarrow X$ jest iniekcją rosnącą to $x \leq f(x)$.

Lemat

Jeżeli $(X, \leq)$ oraz $(Y, \leq)$ są dobrymi podobnymi porządkami to podobieństwo jest jedyne.

Zbiory dobrze uporządkowane

Twierdzenie

Żaden zbiór dobrze uporządkowany nie jest podobny do swojego odcinka początkowego właściwego.

Zbiory dobrze uporządkowane

Twierdzenie

Niech $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ będą dobrymi porządkami. Wtedy przynajmniej jedno z poniższych zdań jest prawdziwe

- 1. istnieje przedział początkowy $P \subset X$ taki, że $(P, \leq_X)$ jest podobny do $(Y, \leq_Y)$*
- 2. istnieje przedział początkowy $S \subset Y$ taki, że $(S, \leq_Y)$ jest podobny do $(X, \leq_X)$*

Aksjomat regularności

Aksjomat regularności

Aksjomat regularności nazywamy czasem aksjomatem ufundowania.

$$\forall x (x \neq \emptyset \implies \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

Aksjomat regularności

Z aksjomatu regularności wynika w szczególności, że:

$$\forall x \ x \notin x$$

Również nie jest możliwe zbudowanie żadnego skończonego ciągu zbiorów tak by pierwszym i ostatnim był ten sam zbiór:

$$x \in y \in x \tag{1}$$

$$x \in y \in z \in x \tag{2}$$

$$x \in y \in z \in t \in x \tag{3}$$

Definicja

Zbiór X nazwiemy liczbą porządkową jeśli ma następujące własności

1. $\forall_{x,y \in X} x \in y \text{ lub } y \in x \text{ lub } x = y$
2. $\forall_{x \in X} x \subset X$

Liczby porządkowe

Twierdzenie

Każdy element liczby porządkowej jest liczbą porządkową.

Lemat

Dla liczby porządkowej X oraz jej elementów $x, y \in X$ jeżeli $x \subset y$ oraz $x \neq y$ to $x \in y$.

Lemat

Dla liczby porządkowej X oraz jej elementów $x, y \in X$ jeżeli $x \in y$ to $x \subset y$.

Liczby porządkowe

Twierdzenie

Każdy zbiór będący liczbą porządkową jest dobrze uporządkowany relacją inkluzji.

Twierdzenie

Każdy przedział początkowy liczby porządkowej jest liczbą porządkową.

Twierdzenie

Zbiór pusty jest elementem każdej niepustej liczby porządkowej.

Prawo trichotomii dla liczb porządkowych

Twierdzenie

Niech $(X, \subset)$, $(Y, \subset)$ będą liczbami porządkowymi. Wtedy dokładnie jedno z poniższych zdań jest prawdziwe

- 1. $(X, \subset)$ jest podobny do $(Y, \subset)$*
- 2. istnieje przedział początkowy $P \subset X$ taki, że $(P, \subset)$ jest podobny do $(Y, \subset)$*
- 3. istnieje przedział początkowy $S \subset Y$ taki, że $(S, \subset)$ jest podobny do $(X, \subset)$*

Prawo trichotomii dla liczb porządkowych

1. Zdefiniować
$$X \supset Z = \{x \in X : \text{istnieje } y \in Y \text{ } P_X(x) \text{ podobny } P_Y(y)\}$$
2. Dla każdego $x \in Z$ taki $y \in Y$ jest jedyny.
3. Istnieje funkcja $f : Z \rightarrow Y$ która jest iniekcją rosnącą
4. Z jest przedziałem początkowym X
5. $\overrightarrow{f}(Z)$ jest przedziałem początkowym Y
6. $X = Z$ lub $Y = \overrightarrow{f}(X)$

Liczby porządkowe

Twierdzenie

Każde dwie liczby porządkowe, jeżeli są podobne to są identyczne.

Twierdzenie

Dla każdych dwóch liczb porządkowych, jedna jest podzbiorem drugiej.

Twierdzenie

każdy zbiór liczb porządkowych jest dobrze uporządkowany inkluzją.

Antynomia Burali-Forti

Twierdzenie (Antynomia Burali-Forti)

Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

Aksjomat zastępowania

Dla dowolnej formuły φ nie posiadającej zmiennych wolnych innych niż w i v następująca formuła jest prawdą

$$\begin{aligned} & (\forall w \exists u \forall v \varphi(w, v) \implies u = v) \implies \\ & (\forall x \exists y \forall v (v \in y \iff \exists w w \in x \wedge \varphi(w, v))) \end{aligned}$$

Aksjomat zastępowania

Nieformalnie, formuła φ przyporządkowuje jednoznacznie pewnym zbiorom inne zbioru. Jest funkcją częściową. Pod tym warunkiem istnieje zbiór bytów przyporządkowany bytom z danego zbioru x . Zupełnie nieformalnie możemy stwierdzić, że dla zdefiniowanej formułą częściowej funkcji, jeśli jako dziedzinę weźmiemy dowolny zbiór x to przeciwdziedzina tej funkcji również jest zbiorem.

Twierdzenie

Każdy zbiór dobrze uporządkowany jest podobny do pewnej liczby porządkowej.

Liczby porządkowe

1. Dowód nie wprost. Niech $(X, \leq)$ nie będzie podobny do żadnej liczby porządkowej.
2. Każda liczba porządkowa jest podobna do pewnego odcinka początkowego $(X, \leq)$.
3. Niech $\phi(o, p)$ będzie formułą o zmiennych wolnych o, p która będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy o jest dobrym porządkiem, p jest liczbą porządkową i o jest podobne do p . Wiemy, że takie p jest jedyne.
4. Z aksjomatu zastępowania istnieje zatem zbiór liczb porządkowych podobnych do przedziałów początkowych X .
5. Istnieje zatem zbiór wszystkich liczb porządkowych, sprzeczność.