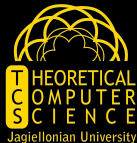


# METODY FORMALNE INFORMATYKI

**Marek Zaionc**

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



**Wykład 20 i 21 w dniu 7 i 8 stycznia 2025**

# Podobieństwo porządków

## Definicja

*Dwa porządki  $(X, R)$  oraz  $(Y, S)$  nazywamy podobnymi gdy istnieje bijekcja  $f : X \rightarrow Y$  rosnąca czyli taka, że  $(x, y) \in R$  wtw  $(f(x), f(y)) \in S$ .*

## Fakt

*Liniowość jest przenoszona przez podobieństwo.*

## Fakt

*Gdy dwa porządki  $(X, R)$  oraz  $(Y, S)$  są liniowe i podobne wtw gdy  $(x, y) \in R$  to  $(f(x), f(y)) \in S$ .*

# Zbiory dobrze uporządkowane

## Definicja

*Porządek  $(X, \leq)$  nazywamy dobrym gdy każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy.*

# Zbiory dobrze uporządkowane

## Definicja

*Para  $(X, \leq)$  jest porządkiem. Następnikiem elementu  $x \in X$  jest element  $y \in X$  gdy:*

- 1.  $x < y$*
- 2. jeżeli  $x < z$  to  $y \leq z$*

## Fakt

*W dobrym porządku, każdy element za wyjątkiem największego posiada następnik.*

# Zbiory dobrze uporządkowane

## Definicja

*Zbiór  $A \subset X$  nazywamy przedziałem początkowym zbioru  $X$  jeżeli  $x \in A$  oraz  $y \leq x$  to  $y \in A$ .*

## Fakt

*W dobrym porządku każdy przedział początkowy właściwy jest postaci  $\{x \in X : x < x_0\}$  dla pewnego  $x_0 \in X$ .*

# Zbiory dobrze uporządkowane

Lemat

*Niech  $(X, \leq)$  będzie dobrym porządkiem i niech  $\mathcal{R}$  będzie jego rodziną przedziałów początkowych właściwych to  $(X, \leq)$  jest podobny do  $(\mathcal{R}, \subset)$ .*

Lemat

*Dobry porządek jest przenoszony przez podobieństwo*

# Indukcja pozaskończona

## Definicja

Niech  $(X, \leq)$  będzie liniowym porządkiem. W  $(X, \leq)$  obowiązuje ZASADA INDUKCJI jeżeli dla dowolnego zbioru  $Z$  takiego że:

1.  $Z \subset X$
2.  $Z \neq \emptyset$
3. jeżeli  $\{y \in X : y < x\} \subset Z$  to  $x \in Z$

zachodzi że  $Z = X$

# Indukcja pozaskończona

Twierdzenie

*W dobrym porządku obowiązuje zasada indukcji.*

# Indukcja pozaskończona

Twierdzenie

*Niech  $(X, \leq)$  będzie liniowym porządkiem w którym istnieje element najmniejszy i w którym obowiązuje zasada indukcji.*

*TEZA:  $(X, \leq)$  jest porządkiem dobrym.*

# Indukcja pozaskończona

Lemat

*$(X, \leq)$  jest porządkiem dobrym oraz  $f : X \rightarrow X$  jest iniekcją rosnącą to  $x \leq f(x)$ .*

Lemat

*Jeżeli  $(X, \leq)$  oraz  $(Y, \leq)$  są dobrymi podobnymi porządkami to podobieństwo jest jedyne.*

# Zbiory liniowo uporządkowane

## Definicja

*Porządki liniowe  $(X, \leq)$  i  $(Y, \leq)$  nazywamy podobnymi gdy istnieje bijekcja  $f : X \rightarrow Y$  rosnąca czyli taka że jeżeli  $x \leq y$  to  $f(x) \leq f(y)$ .*

## Lemat

*Dla podobieństwa  $f$  zachodzi jeżeli  $f(x) \leq f(y)$  to  $x \leq y$*

# Porządki gęste

## Definicja

*Porządek  $(X, \leq)$  nazywamy gęstym gdy*

$$\forall_{x,y \in X} \ x < y \Rightarrow \exists_{z \in X} \ x < z < y$$

## Lemat

*Gęstość jest przenoszona przez podobieństwo.*

# Przekroje Dedekinda

## Definicja

*Niech  $(X, \leq)$  będzie porządkiem liniowym. Przekrojem Dedekinda w  $(X, \leq)$  nazywamy parę zbiorów  $X_1, X_2 \subset X$  taką że:*

1.  $X_1 \cup X_2 = X$ .
2.  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ .
3.  $\forall_{x_1 \in X_1, x_2 \in X_2} \quad x_1 < x_2$ .
4.  $X_1 \neq \emptyset$  i  $X_2 \neq \emptyset$ .

# Przekroje Dedekinda

## Definicja

*Przekrój  $X_1, X_2$  daje skok jeżeli  $X_1$  ma element największy i  $X_2$  ma element najmniejszy.*

## Lemat

*Porządek  $(X, \leq)$  jest gęsty wtw żaden przekrój nie daje skoku.*

# Suprema i infima

## Definicja

$A \subset X$ . Element  $a_0 \in X$  nazywamy supremum zbioru  $A$  gdy:

1.  $\forall_{a \in A} \ a \leq a_0$
2. jeżeli  $\forall_{a \in A} \ a \leq b \Rightarrow a_0 \leq b$

## Definicja

$A \subset X$ . Element  $b_0 \in X$  nazywamy infimum zbioru  $A$  gdy:

1.  $\forall_{a \in A} \ b_0 \leq a$
2. jeżeli  $\forall_{a \in A} \ b \leq a \Rightarrow b \leq b_0$

## Definicja

*Przekrój  $X_1, X_2$  daje lukę jeżeli  $X_1$  nie ma elementu największego i  $X_2$  nie ma elementu najmniejszego.*

# Porządki ciągłe

## Definicja

*Porządek liniowy  $(X, \leq)$  nazywamy ciągłym wtw żaden przekrój nie daje luki.*

Twierdzenie

*W porządku ciągłym  $(X, \leq)$  każdy niepusty zbiór ograniczony od góry ma supremum.*

Twierdzenie

*W porządek liniowym  $(X, \leq)$  jeżeli każdy niepusty zbiór ograniczony od góry ma supremum to porządek jest ciągły.*

# Porządki ciągłe

Twierdzenie

*W porządek liniowym  $(X, \leq)$  jeżeli każdy niepusty zbiór ograniczony od dołu ma infimum to porządek jest ciągły.*

Lemat

*Ciągłość jest przenoszona przez podobieństwo.*

Twierdzenie

$\mathbb{R}$  *jest ciągła.*