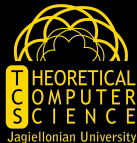


METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



Wykład 19 w dniu 18 grudnia 2024

Definicja

Porządkiem nazywamy parę (X, R) gdzie X jest zbiorem a $R \subset X^2$ jest relacją

1. *zwrotną*
2. *przechodnią*
3. *antysymetryczną to znaczy jeżeli pary $(x, y) \in R$ oraz $(y, x) \in R$ to $x = y$.*

Porządek liniowy

Definicja

Jeżeli dodatkowo relacja R jest spójna

$$(\forall_{x,y \in X} (x,y) \in R \text{ lub } (y,x) \in R)$$

to porządek nazywamy liniowym.

Oznaczenia

Często będziemy oznaczać relacje porządkującą jako $\leq$. Oznaczamy też $x < y$ gdy $x \leq y$ oraz $x \neq y$.

Definicja

Elementem a jest maksymalnym w porządku $(X, \leq)$ gdy

$$\forall_{x \in X} \quad a \leq x \Rightarrow a = x$$

Elementem a jest minimalny w porządku $(X, \leq)$ gdy

$$\forall_{x \in X} \quad x \leq a \Rightarrow a = x$$

Element a nazywamy największym w porządku $(X, \leq)$ gdy

$$\forall_{x \in X} \quad x \leq a$$

Element a nazywamy najmniejszym w porządku $(X, \leq)$ gdy

$$\forall_{x \in X} \quad a \leq x$$

Definicja

$L \subset X$ jest łańcuchem w porządku (X, R) gdy zbiór L z zacieśnionym porządkiem czyli $(L, R \cap (L \times L))$ jest porządkiem liniowym.

Definicja

Niech $A \subset X$ oraz $b \in X$. Mówimy że b jest majorantą zbioru A gdy $\forall_{a \in A} a \leq b$.

Niech $A \subset X$ oraz $b \in X$. Mówimy że b jest minorantą zbioru A gdy $\forall_{a \in A} b \leq a$.

Lemat Kuratowskiego Zorna



Kazimierz Kuratowski
(Warszawa 1893-1980)



Max August Zorn
(1906-Krefeld, Niemcy - Bloomington, 1993)

Lemat Kuratowskiego - Zorna

Lemat (Kuratowskiego -Zorna)

Założenia: $(X, \leq)$ jest porządkiem w którym każdy łańcuch ma majorantę.

Teza: Istnieje w $(X, \leq)$ element maksymalny.

Lemat Kuratowskiego - Zorna

Lemat (Kuratowskiego -Zorna)

Założenia: $(X, \leq)$ jest porządkiem w którym każdy łańcuch ma minorantę.

Teza: Istnieje w $(X, \leq)$ element minimalny.

Zastosowania lematu Kuratowskiego - Zorna

Twierdzenie

Niech A, B będą niepustymi zbiorami. Istnieje iniekcja ze zbioru A do B lub istnieje iniekcja ze zbioru B do zbioru A .

Dla dowodu rozważyć zbiór

$$\mathcal{I} = \{f \subset A \times B : f \text{ jest częściową iniekcją z } A \text{ do } B\}$$

Para $(\mathcal{I}, \subset)$ jest porządkiem.

Zastosowania lematu Kuratowskiego - Zorna

Twierdzenie

Każdy porządek da się rozszerzyć do porządku liniowego.

Niech (X, R_0) będzie porządkiem. Dla dowodu rozważyć zbiór

$$\mathcal{R} = \{R \subset X^2 : R_0 \subset R \text{ i } R \text{ jest porządkiem} \}$$