

METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



Wykłady 15, 16 w dniach 3 i 4 grudnia 2024

Definicja

Zbiory A i B nazywamy równolicznymi gdy istnieje bijekcja $f : A \rightarrow B$. Równoliczność zbiorów oznaczamy przez $A \sim_m B$.

Twierdzenie

Równoliczność ma własności:

1. $A \sim_m A$.
2. jeżeli $A \sim_m B$ to $B \sim_m A$.
3. jeżeli $A \sim_m B$ i $B \sim_m C$ to $A \sim_m C$.

Równoliczność, własności

Twierdzenie

Podstawowe własności relacji równoliczności:

1. $A \sim_m B$ i $C \sim_m D$ oraz $A \cap C = B \cap D = \emptyset$ to $A \cup C \sim_m B \cup D$.
2. $A \sim_m B$ i $C \sim_m D$ to $A^C \sim_m B^D$.
3. $(A^B)^C \sim_m A^{B \times C}$.
4. $(A \times B)^C \sim_m A^C \times B^C$.
5. Gdy $B \cap C = \emptyset$ to $A^{B \cup C} \sim_m A^B \times A^C$.
6. $P(A) \sim_m 2^A$.

Zbiory skończone

Definicja

Zbiór A nazywamy skończonym gdy $A \sim_m n$ dla pewnej liczby naturalnej n .

Zbiór A nazywamy nieskończonym gdy A nie jest skończony.

Zbiory skończone

Lemat

Zbiór A jest skończony, $B \subset A$ to B też jest skończony.

Lemat

Zbiór A jest skończony, $f : A \rightarrow B$ to $\overrightarrow{f}(A)$ też jest skończony.

Twierdzenie

Jeżeli N_0 jest nieskończonym podzbiorem $\mathbb{N}$ to $N_0 \sim_m \mathbb{N}$.

Zbiory przeliczalne

Definicja

Zbiór X jest przeliczalny gdy $X \sim_m N_0$ dla pewnego $N_0 \subset \mathbb{N}$.

Aksjomat wyboru

$$\forall_{x \neq \emptyset} (\forall_{y \in x} y \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{f: x \rightarrow \bigcup x} \forall_{y \in x} f(y) \in y)$$

Funkcja wyboru

Jeżeli x jest niepustą rodziną zbiorów niepustych to przez W_x będziemy oznaczać funkcje wyboru dla tej rodziny.

Twierdzenie

A, B są niepustymi zbiorami. Następujące warunki są równoważne.

- 1. istnieje iniekcja $f : A \rightarrow B$.*
- 2. istnieje surjekcja $g : B \rightarrow A$.*

Definicja

Zbiór X daje się ustawić w ciąg gdy istnieje surjekcja $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Twierdzenie

X daje się ustawić w ciąg wtw X jest przeliczalny.

Twierdzenie

X jest przeliczalny wtw X jest skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$.

Lemat

Własności dotyczące zbiorów przeliczalnych

1. *Podzbiór przeliczalnego zbioru jest przeliczalny.*
2. *Suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.*
3. $\mathbb{N}^2$ *jest przeliczalny.*
4. *iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.*
5. $\mathbb{N}^k$ *dla $k \geq 1$ jest przeliczalny.*

Lemat

Własności dotyczące zbiorów przeliczalnych

1. *Niech $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ będzie skończoną rodziną zbiorów przeliczalnych. Wtedy $\bigcup x$ jest przeliczalny.*
2. *Jeżeli X przeliczalny oraz $r \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ jest rozkładem to r jest przeliczalny.*

Twierdzenie

Zbiory liczb całkowitych i wymiernych są przeliczalne.