

METODY FORMALNE INFORMATYKI

Marek Zaionc

<http://tcs.uj.edu.pl/Zaionc>



Wykłady 13, 14 w dniach 19.11 i 20.11 2024

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Definicja

*Ciagiem elementów zbioru A nazywamy każdą funkcję $a : \mathbb{N} \rightarrow A$.
Przez a_n oznaczamy element ciągu $a(n)$.*

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Definicja

Ciagiem Cauchy'ego zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nazywamy każdy taki ciąg $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ który spełnia warunek (Cauchy'ego)

$$\forall_{\mathbb{Q} \ni \varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{p, k \in \mathbb{N}} (p, k > n_0 \Rightarrow |a_p - a_k| < \varepsilon)$$

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Definicja

Ciag $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ nazywamy ograniczonym gdy spełnia:

$$\exists_{M>0} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |a_n| < M$$

Fakt

Ciagi Cauchy'ego sa ograniczone

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Definicja

Niech X oznacza zbiór ciągów Cauchy'ego czyli zbiór $\{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} : a \text{ jest ciagiem Cauchy'ego}\}$. Na X określamy relacje następująco: dwa ciągi a i b są równoważne co zapisujemy jako $a \simeq b$ gdy:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon)$$

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Georg Ferdinand Cantor



(Petersburg 1845, 1918 Halle)

Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Twierdzenie

Relacja $\simeq$ określona na X jest relacją równoważności.

Definicja $\mathbb{R}$

Definicja

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ definiujemy jako $X / \simeq$.

Działania na $\mathbb{R}$

- ▶ dodawanie $[a]_{\simeq} + [b]_{\simeq} = [a + b]_{\simeq}$
- ▶ mnożenie $[a]_{\simeq} \cdot [b]_{\simeq} = [a \cdot b]_{\simeq}$

Definicja

Relacja $[a]_{\simeq} < [b]_{\simeq}$ na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako

$$\exists_{\mathbb{Q}} \exists \varepsilon > 0 \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{k > n_0} \quad a_k + \varepsilon < b_k$$

Twierdzenie

Relacja $<$ określona na $\mathbb{R}$ jest dobrze zdefiniowana to znaczy nie zależy od wyboru reprezentantów klasy.

Twierdzenie

Relacja $<$ określona na $\mathbb{R}$ jest relacją porządku liniowego.

Definicja

Rozważmy funkcję $k : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną następująco: dla liczby wymiernej $q \in \mathbb{Q}$ liczba rzeczywista $k(q)$ jest klasą równoważności ciągu $[b]_{\simeq}$ gdzie $b(n) = q$.

Włożenie $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$

Funkcja ta jest naturalnym włożeniem zbioru $\mathbb{Q}$ w zbiór $\mathbb{R}$. Jest iniektywna i zgodna z działaniami i relacją $<$.

1. $k(a + b) = k(a) + k(b)$
2. $k(a - b) = k(a) - k(b)$
3. $k(a \cdot b) = k(a) \cdot k(b)$
4. jeżeli $a < b$ to $k(a) < k(b)$

Dzięki włożeniu k będziemy utożsamiali liczbe wymierna q z odpowiadajaca jej liczba rzeczywista $k(q)$.

Rozwijanie liczb rzeczywistych w szereg

Twierdzenie

Dla kazdej liczby rzeczywistej $0 \leq x < 1$ istnieje ciag $a \in 2^{\mathbb{N}}$ taki, ze ciag jego sum czesciowych $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ zdefiniowany jako

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{2^{i+1}} \text{ spelnia}$$

- 1. b jest ciagiem Cauchy'ego*
- 2. $[b]_{\simeq} = x$ (lub inaczej $b \in x$)*

Rozwijanie liczb rzeczywistych w szereg

Konstrukcja ciągu a bedacego rozwinięciem dwójkowym liczby x i równolegle ciągu b danego jako $b_k = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{2^{i+1}}$ sum częściowych ciągu a .

Jezeli $0 \leq x < 1/2$ definiujemy $a_0 = 0$,

Jezeli $1/2 \leq x < 1$ definiujemy $a_0 = 1$.

Zalóźmy, że mamy zdefiniowany ciąg a do wyrazu k . Wyraz $k + 1$ definiujemy

definiujemy $a_{k+1} = 1$ jezeli $b_k + \frac{1}{2^{k+2}} \leq x$

definiujemy $a_{k+1} = 0$ jezeli $b_k + \frac{1}{2^{k+2}} > x$

Rozwijanie liczb rzeczywistych w szereg

Pokazemy indukcyjnie, że dla każdego k zachodzi

$$b_k \leq x \leq b_k + \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (1)$$

Rozwijanie liczb rzeczywistych w szereg

Dowód czesci drugiej $[b]_{\simeq} = x$.

Niech c bedzie dowolnym ciagiem Cauchy'ego wyznaczajacym liczbe rzeczywista x czyli niech $[c]_{\simeq} = x$. Nalezy pokazać, ze ciagi b i c sa równowazne w sensie $\simeq$. Weźmy $\varepsilon > 0$. Dobieramy tak duze k aby $\frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$. Dalej wynika trywialnie z nierównosci

Rozwijanie liczb rzeczywistych w szereg

Definicja

Tak zdefiniowany ciąg a nazywamy rozwinięciem liczby x przy podstawie 2.

Twierdzenie

Ciąg a będący rozwinięciem liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ leżącej $0 \leq x < 1$ jest zawsze takie że:

$$\forall_k \exists_{n>k} a_n = 0$$

Rozwijanie liczb rzeczywistych w szereg

Twierdzenie

Istnieje bijekcja pomiędzy odcinkiem $[0; 1) \subset \mathbb{R}$ a zbiorem
 $\{a \in 2^{\mathbb{N}} : \forall_k \exists_{n>k} a_n = 0\}$