

Sprawdzian z Metod Formalnych Informatyki, 15.11.2012

Imię i nazwisko	
Numer grupy:	

Oświadczam, że w czasie trwania sprawdzianu nie udzielałem pomocy innym studentom, oraz że sam nie korzystałem z pomocy w żadnej formie.

Sprawdzian trwa 90 minut. Każdą odpowiedź należy uzasadnić.

1. Rozważamy język pierwszego rzędu z jednym predykatem binarnym $p(-, -)$. Dla każdej z poniższych par modeli napisz formułę pierwszego rzędu która je rozróżnia (tzn. jest prawdziwa w jednym i fałszywa w drugim)
 - (a) i. A jest zbiorem wszystkich kwadratów (z wnętrzem i brzegiem) oraz punktów na płaszczyźnie, predykat $p(a, b)$ jest prawdą wtw $a \cap b \neq \emptyset$,
ii. B jest zbiorem wszystkich kół (z wnętrzem i brzegiem) oraz punktów na płaszczyźnie, predykat $p(a, b)$ jest prawdą wtw $a \cap b \neq \emptyset$,
 - (b) i. A jest zbiorem wszystkich kwadratów (z wnętrzem i brzegiem), predykat $p(a, b)$ jest prawdą wtw $a \cap b \neq \emptyset$,
ii. B jest zbiorem wszystkich kół (z wnętrzem i brzegiem), predykat $p(a, b)$ jest prawdą wtw $a \cap b \neq \emptyset$,

W powyższych formułach można używać zdefiniowanych przez siebie skrótów.

2. Rozważmy formuły zdaniowe zbudowane z $\wedge, \vee, \neg$. Dowolną funkcję $v : Vars \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (przypisującą zmiennym podzbiory liczb naturalnych) rozszerzamy na wszystkie formuły w następujący sposób:

$$F_v(\phi) := \begin{cases} v(\phi) & \text{gdy } \phi \text{ jest zmienną} \\ F_v(\phi_1) \cup F_v(\phi_2) & \text{gdy } \phi \text{ jest postaci } \phi_1 \vee \phi_2 \\ F_v(\phi_1) \cap F_v(\phi_2) & \text{gdy } \phi \text{ jest postaci } \phi_1 \wedge \phi_2 \\ \mathbb{N} \setminus F_v(\phi_1) & \text{gdy } \phi \text{ jest postaci } \neg \phi_1 \end{cases}$$

Udowodnij, że jeśli $F_v(\phi) \neq \mathbb{N}$, dla pewnego wartościowania $v : Vars \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ to ϕ nie jest tautologią logiki klasycznej.

3. Dla rodziny zbiorów R niech $\overline{R} := \{a \in \mathcal{P}(\bigcup R) : \exists x, y \in R a = x \setminus y\}$. Sprawdź, które z poniższych inkluzji zachodzą dla każdej rodziny R , dla każdej podaj dowód lub kontrprzykład:

- (a) $\overline{\overline{R}} \subset \overline{R}$,
- (b) $\overline{\overline{R}} \supset \overline{R}$.

4. Rozważmy model M , którego dziedziną są wszystkie odcinki (z końcami) o dodatniej długości na płaszczyźnie, równoległe do którejś z osi. Załóżmy, że w M jest predykat binarny, oznaczony symbolem p , taki że $p(x, y)$ jest prawdą dokładnie wtedy, kiedy x ma niepuste przecięcie z y . Napisz formuły, które w modelu M są równoważne następującym zdaniom (w kolejnych formułach można wykorzystywać skróty dla formuł zdefiniowanych wcześniej):

- (a) a jest podzbiorem b ,
- (b) a jest równe b ,
- (c) a jest równoległy do b ,
- (d) koniec odcinka a leży na b ,
- (e) a, b, c, d są kolejnymi bokami prostokąta,
- (f) a, b, c, d są kolejnymi bokami prostokąta i e leży wewnątrz tego prostokąta.