

Sprawdzian ze Wstępu do matematyki, 15.11.2011

Imię i nazwisko	
Nazwisko prowadzącego ćwiczenia	

Oświadczam, że w czasie trwania sprawdzianu nie udzielałem pomocy innym studentom, oraz że sam nie korzystałem z pomocy w żadnej formie.

Sprawdzian trwa 90 minut. Rozwiązanie każdego zadania proszę oddać na oddzielnej kartce.

1. Rozważmy model (świat) M , którego dziedziną jest zbiór wszystkich trójkątów (bez wnętrza) na płaszczyźnie. Do M należą również trójkąty zdegenerowane, czyli wszystkie odcinki oraz punkty. Załóżmy, że w M jest predykat binarny, oznaczony symbolem p , taki że $p(x, y)$ jest prawdą dokładnie wtedy, gdy trójkąt x zawiera się w trójkącie y .

Napisać formuły używające symboli logicznych i kwantyfikatorów oraz symbolu p , które w modelu M są równoważne następującym zdaniom. W kolejnych formułach można wykorzystywać skróty dla formuł zdefiniowanych wcześniej.

- (a) (2p) x i y są równe;
 - (b) (4p) x jest punktem;
 - (c) (4p) x jest trójkątem niezdegenerowanym;
 - (d) (5p) x jest odcinkiem, który jest bokiem trójkąta niezdegenerowanego y ;
 - (e) (3p) trójkąty niezdegenerowane x i y mają wspólny bok.
2. (10p) Znaleźć wszystkie zbiory x spełniające równanie

$$\bigcup x = \emptyset.$$

3. Rozważmy rodzinę zbiorów $\mathcal{A}$ taką, że

- (i) $\forall a \in \mathcal{A} \forall b \subseteq a: b \in \mathcal{A}$
- (ii) $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} ((\forall p, q \in \mathcal{B}: p \cup q \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A})$.

Pokazać, że

- (a) (4 p) Jeżeli $a \in \mathcal{A}$ to $\forall x \forall y (x, y \in a \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{A})$,
- (b) (8 p) Jeżeli $\forall x \forall y (x, y \in a \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{A})$ to $a \in \mathcal{A}$.

Wskazówka do 3 b: Rozważ rodzinę dwuelementowych zbiorów złożonych z elementów zbioru a .