

Sprawdzian ze Wstępu do matematyki, 18.11.2010

Imię i nazwisko	
Nazwisko prowadzącego ćwiczenia	

Oświadczam, że w czasie trwania sprawdzianu nie udzielałem pomocy innym studentom, oraz że sam nie korzystałem z pomocy w żadnej formie.

Sprawdzian trwa 90 minut. Rozwiązanie każdego zadania proszę oddać na oddzielnej kartce.

1. (12p) Znajdź najmniejszy niepusty zbiór D oraz funkcje $s: D \rightarrow D$ i $+: D^2 \rightarrow D$ tak, aby $0 \in D$ oraz następujące aksjomaty były prawdziwe:

$$\begin{aligned}\forall_x 0 &\neq s(x), \\ \forall_{y \neq 0} \exists_x y &= s(x), \\ \forall_x x + 0 &= x, \\ \forall_x \forall_y x + s(y) &= s(x + y).\end{aligned}$$

2. (12p) Pokaż, że relacja $r \subseteq X \times Y$ jest funkcją wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r \circ r^{-1} \subseteq \mathbf{1}_Y \quad \text{oraz} \quad r^{-1} \circ r \subseteq \mathbf{1}_X.$$

3. Rozważmy model M , którego dziedziną jest zbiór wszystkich prostokątów na płaszczyźnie, których boki są równoległe do osi układu współrzędnych. Do M należą także zdegenerowane prostokąty będące odcinkami oraz punkty. Załóżmy, że w M jest predykat binarny, oznaczony symbolem p , taki że $p(x, y)$ jest prawdą dokładnie wtedy, kiedy prostokąt x zawiera prostokąt y . Napisz formuły używające symboli logicznych i kwantyfikatorów oraz symbolu p , które w modelu M są równoważne następującym zdaniom. W kolejnych formułach można wykorzystywać skróty dla formuł zdefiniowanych wcześniej.

- (a) (1p) x i y są równe,
- (b) (3p) x i y mają co najmniej jeden punkt wspólny,
- (c) (3p) x jest punktem,
- (d) (3p) x jest odcinkiem,
- (e) (3p) x jest odcinkiem który jest bokiem y ,
- (f) (3p) x ma niepuste wnętrze.