

Egzamin testowy z Metod Formalnych Informatyki

30 stycznia 2014

Imię i nazwisko	
-----------------	--

Egzamin trwa 100 minut.

W pytaniach, w których należy wybrać odpowiedź tak lub nie, za każdą poprawną odpowiedź otrzymuje się 1 punkt; za każdą błędną –1 punkt; za brak odpowiedzi lub odpowiedź nieczytelną otrzymuje się 0 punktów.

W zadaniach, w których należy wpisać konkretną wartość, udzielenie poprawnej odpowiedzi to 1 punkt; za brak odpowiedzi lub odpowiedź błędną nie otrzymuje się punktów.

1. Dla poniższych formuł podaj liczbę spełniających je wartościowań ze zbioru $\{0, 1\}^{\{p, q, r\}}$.
 - $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r))$ [.....]
 - $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow q))$ [.....]

2. Podaj liczbę minimalnych (w sensie inkluzji) funkcjonalnie pełnych podzbiorów zbioru spójników:
 - $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \text{XOR}, \text{NAND}, \iff\}$ [.....]

3. Oceń czy formuła

$$\forall x \exists y \forall z [(x \leq z \wedge z \leq y) \rightarrow (x \neq z \wedge y \neq z)]$$
 jest prawdziwa w poniższych zbiorach z naturalnym porządkiem:
 - $\mathbb{N}$ T[] N[]
 - $\mathbb{R}$ T[] N[]

4. Dla każdego z poniższych przypadków oceń czy da się tak ponawiasować lewą stronę, aby otrzymać wyrażenie równoważne prawej dla dowolnego zbioru X oraz dowolnych $x, y \subset X$.
 - $x \setminus x \setminus y \setminus y \stackrel{?}{=} x \cap y$ T[] N[]
 - $X \setminus X \setminus x \setminus y \stackrel{?}{=} x \cup y$ T[] N[]
 - $X \setminus X \setminus x \setminus y \stackrel{?}{=} (x \cup y) \setminus (x \cap y)$ T[] N[]

5. Czy zbiór $(\emptyset, \emptyset) \cup \{\emptyset, \emptyset\}$ jest liczbą naturalną? T[] N[]

6. Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe dla każdego zbioru niepustego X ?
 - Dla każdej relacji R na zbiorze X istnieje najmniejsza (w sensie inkluzji) relacja równoważności zawierająca R T[] N[]
 - Dla każdej zwrotnej relacji R na zbiorze X istnieje największa (w sensie inkluzji) relacja równoważności zawarta w R T[] N[]

7. Niech $Pr \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem wszystkich liczb parzystych. Zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ następująco:

$$F(f) = \vec{f}^{-1}(Pr)$$
 Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń:
 - F jest iniekcją T[] N[]
 - F jest suriekcją T[] N[]

8. Czy dla dowolnego skończonego zbioru X istnieje relacja $R \subset X^2$ taka, że (X, R) jest posetem gęstym? T[] N[]

9. Pewną funkcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ można przedstawić jako $g \circ h$, gdzie g jest iniekcją, a h jest suriekcją.

- czy f musi być suriekcją? T[] N[]
- czy f musi być iniekcją? T[] N[]

10. Pewną funkcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ można przedstawić jako $h \circ g$, gdzie g jest iniekcją, a h jest suriekcją. (Uwaga! odwrotne złożenie, niż w poprzednim punkcie).

- czy f musi być suriekcją? T[] N[]
- czy f musi być iniekcją? T[] N[]

11. Dla ustalonego niepustego $y_0 \subset \mathbb{N}$ zdefiniujmy funkcje $f_r, f_s, f_p, f_{rs}: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ następująco

$$f_r(x) = y_0 \setminus x \quad f_s(x) = x \cup y_0 \quad f_p(x) = x \cap y_0 \quad f_{rs}(x) = (x \cup y_0) \setminus (x \cap y_0).$$

Dla każdej funkcji oceń czy posiada najmniejszy punkt stały:

- f_r , T[] N[]
- f_s , T[] N[]
- f_p , T[] N[]
- f_{rs} , T[] N[]

12. Czy istnieje liczba $a \in \mathbb{N}$ taka, że $a \neq 0$ oraz

- $\forall_{b \in \mathbb{N}} a + b = a \cup b$? T[] N[]
- $\forall_{b \in \mathbb{N}} a \cdot b = a \cap b$? T[] N[]

13. Ile jest funkcji $f \in \{0, 1, 2\}^{\{0, 1, 2\}}$ takich, że:

- f nie ma punktów stałych? [.....]
- $f \circ f$ nie ma punktów stałych? [.....]

14. Jaka jest moc zbioru $A^{\mathbb{N}}$, gdy:

- $A = \{0, 1\}$? [.....]
- $A = \mathbb{N}$? [.....]
- $A = \mathbb{R}$? [.....]

15. W zbiorze $\mathbb{N}^2$ wprowadzamy następujący porządek:

$$(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \Leftrightarrow [a_1 < a_2 \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq b_2).]$$

- Czy porządek $\preccurlyeq$ jest dobry? T[] N[]
- Czy w porządku $(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq)$ istnieje silnie malejący nieskończony ciąg elementów? T[] N[]

16. Czy istnieje niepusty poset, w którym każdy niepusty łańcuch ma majorantę nienależącą do tego łańcucha? T[] N[]