

Egzamin testowy ze Wstępu do Matematyki, 31.01.2012

Imię i nazwisko	
Nazwisko prowadzącego ćwiczenia	
Ocena z zaliczenia	

Egzamin trwa 90 minut. Pierwszą część stanowią pytania, na które należy udzielić odpowiedzi TAK/NIE. Odpowiedź należy zaznaczyć z boku kartki w następujący sposób:

zaznaczony ☐ — odpowiedź brzmi TAK

zaznaczone ☐ — odpowiedź brzmi NIE.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymuje się 1 punkt; za każdą błędną -1 punkt; za brak odpowiedzi lub odpowiedź nieczytelną otrzymuje się 0 punktów. Druga część to zadania, w których należy wpisać konkretną wartość lub przedstawić wykres. Udzielenie poprawnej odpowiedzi to 1 punkt, za brak odpowiedzi lub odpowiedź błędną nie otrzymuje się punktów.

I Część

1. Niech X będzie zbiorem $\{a, b, c, d, e\}$. Funkcja $f : X \rightarrow X$ jest określona następująco: $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = d, f(d) = e, f(e) = c$. Przez $f^n : X \rightarrow X$ oznaczamy n -krotne złożenie funkcji f .

- (a) ☐ ☐ Czy f jest iniekcją?
(b) ☐ ☐ Czy f jest surjekcją?
(c) ☐ ☐ Czy istnieje takie $n > 0$, że $f^n = \text{id}_X$?
(d) ☐ ☐ Istnieje taki zbiór $A \subseteq X$, że $\vec{f}(A) = A$.
(e) ☐ ☐ Dla każdego zbioru $B \subseteq X$, $\vec{f}^{-1}(B) \neq B$.

-
2. Niech $P = \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 6\}$ oraz

$$\forall x, y \in P : x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : xz = y.$$

- (a) ☐ ☐ Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \sqsubseteq)$ ma dokładnie jeden element minimalny i dokładnie jeden element maksymalny.
(b) ☐ ☐ Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \sqsubseteq)$ nie ma elementu największego i ma dokładnie jeden element najmniejszy.
(c) ☐ ☐ Zbiór częściowo uporządkowany $(P, \sqsubseteq)$ ma antyłańcuchy maksymalne w sensie inkluzji o mocach 3 i 6.
(d) ☐ ☐ Zbiór $(P, \sqsubseteq)$ jest liniowo uporządkowany.
(e) ☐ ☐ Moc zbioru wszystkich łańcuchów w $(P, \sqsubseteq)$ jest mocy kontinuum.

-
3. Jeśli $X \subset \mathbb{N}$, to:

- (a) ☐ ☐ $\bigcup X = \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem nieskończonym.
(b) ☐ ☐ Jeśli X jest zbiorem skończonym, to $\bigcup X = \max\{x : x \in X\}$.
(c) ☐ ☐ Istnieje dokładnie jeden zbiór X taki, że $\bigcup X = X$.
(d) ☐ ☐ Istnieje nieskończony zbiór X taki, że $\bigcup X = X$.

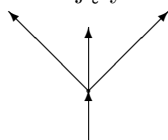
-
4. Oceń każde ze zdań:

- (a) ☐ ☐ Nie istnieje relacja równoważności na $\mathbb{N}$, która jest spójna.
(b) ☐ ☐ Suma dwóch relacji równoważności jest relacją równoważności.
(c) ☐ ☐ Dla dowolnych zbiorów $A \neq \emptyset$ oraz B, C prawdziwa jest implikacja:
jeżeli $A^B \sim_m A^C$ to $B \sim_m C$.

- (d) ☐ ☐ Dla dowolnej funkcji $f : X \rightarrow Y$ i dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzi $\vec{f}(A \cap B) = \vec{f}(A) \cap \vec{f}(B)$.
- (e) ☐ ☐ Domknięcie symetryczne relacji zwrotnej jest relacją zwrotną.
- (f) ☐ ☐ Istnieje bijekcja między zbiorem punktów koła o promieniu 1 a zbiorem punktów odcinka otwartego $(0, 1)$.
- (g) ☐ ☐ Moc zbioru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest istotnie większa od mocy zbioru $\mathbb{R}^2$.

II Część

1. Dany jest następujący diagram Hassego przedstawiający zbiór częściowo uporządkowany o 5 elementach:



Podaj liczbę łańcuchów	
Podaj liczbę antyłańcuchów	
Podaj liczbę łańcuchów maksymalnych	
Podaj liczbę antyłańcuchów maksymalnych	
Podaj liczbę łańcuchów, które są antyłańcuchami	

2. Dla danej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz danego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ wylicz obraz $\vec{f}(A)$ i przeciwobraz $\vec{f}^{-1}(A)$. Notacja $\lfloor x \rfloor$ oznacza podłogę liczby x , czyli największą liczbę całkowitą nie większą niż x .

f	A	$\vec{f}(A)$	$\vec{f}^{-1}(A)$
$f(x) = \lfloor x \rfloor$	$(2, 3)$		
$f(x) = x^2 + 4x + 3$	$(-3, -1]$		

3. Poniżej narysować zbiór tych punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dla których jest prawdziwa formuła:

$$\exists a \in \mathbb{R}: y = (x + a)^2.$$

