

Egzamin testowy z Metod Formalnych Informatyki 02.02.2021

Oświadczam, że w czasie trwania sprawdzianu nie udzielałam/łem pomocy innym studentom oraz że sama nie korzystałam/łem z pomocy w żadnej formie.

Imię i nazwisko:	
------------------	--

Egzamin trwa 60 minut. Pierwszą część (pytania od 1 do 6) stanowią pytania, na które należy udzielić odpowiedzi TAK/NIE. Odpowiedź należy zaznaczyć z boku kartki w następujący sposób:

zaznaczony ☐ — odpowiedź brzmi TAK

zaznaczone ☐ — odpowiedź brzmi NIE.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymuje się 1 punkt; za każdą błędną -1 punkt; za brak odpowiedzi lub odpowiedź nieczytelną otrzymuje się 0 punktów. Druga część (pytania 7 i 8) to zadania, w których należy wpisać konkretną wartość. Udzielenie poprawnej odpowiedzi to 1 punkt, za brak odpowiedzi lub odpowiedź błędną nie otrzymuje się punktów.

I część

1. Czy dla dowolnej liczby naturalnej n

- ☐ ☐ (a) $n \setminus \{n\} \in \mathbb{N}$,
- ☐ ☐ (b) $n \cup \{n\} = n + 1$,
- ☐ ☐ (a) $n \in 2n$,
- ☐ ☐ (b) $1 \in n + 1$?

2. Dla każdej z poniższych formuł zdecyduj czy jest tautologią rachunku predykatów.

- ☐ ☐ (a) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y))$,
- ☐ ☐ (b) $(\forall x P(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \wedge \exists y P(y))$,
- ☐ ☐ (c) $\exists x (P(x, x) \Rightarrow \exists y P(x, y))$,
- ☐ ☐ (d) $P(x) \vee (\exists x \sim P(x))$.

3. Czy dla dowolnego niepustego zbioru X oraz relacji R, S na nim

- ☐ ☐ (a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,
- ☐ ☐ (b) $R \circ R \supseteq R$,
- ☐ ☐ (c) jeśli R i S są jednocześnie relacjami równoważności i funkcjami to $R = S^{-1}$,
- ☐ ☐ (d) jeśli $R \subset S$ to $R \circ R \subset S \circ S$?

4. Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zadana jako $F(f, g) = f \circ g$.
- ☐ ☐ (a) F jest iniekcją.
- ☐ ☐ (b) F jest surjekcją.
- ☐ ☐ (c) Obraz przez F zbioru $\{id_{\mathbb{N}}\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest przeliczalny.
- ☐ ☐ (d) Przeciwobraz przez F zbioru $\{id_{\mathbb{N}}\}$ jest nieprzeliczalny.
5. Zdecyduj czy dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwe są poniższe stwierdzenia.
- ☐ ☐ (a) Jeśli $A <_m B$ to $\mathcal{P}(A) <_m \mathcal{P}(B)$.
- ☐ ☐ (b) Istnieje zbiór X taki, że $\mathcal{P}(X) \sim_m 2^A$.
- ☐ ☐ (c) Istnieje zbiór X taki, że $\mathcal{P}(X) \sim_m 2^{(A \times B)}$.
- ☐ ☐ (d) $A \times B \sim_m A$ lub $B >_m A$ o ile A oraz B są nieskończone.
6. Czy dla dowolnego zbioru niepustego X
- ☐ ☐ (a) na X istnieją porządek częściowy,
- ☐ ☐ (b) na X istnieją porządek liniowy,
- ☐ ☐ (c) na X istnieją porządek liniowy i gęsty,
- ☐ ☐ (d) na X istnieją dobry porządek?

II część

7. W tabelce poniżej zdefiniowane są relacje równoważności. Dla każdej z nich proszę w kolumnie **I** wpisać ten ze zbiorów: $0, 1, \dots, \mathbb{N}, \mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}$ z którym zbiór klas abstrakcji jest w bijekcji, w innym przypadku D . W kolumnie **MAX** największy a kolumnie **MIN** najmniejszy, ze względu na moc, ze zbiorów $0, 1, \dots, \mathbb{N}, \mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}$ dla którego istnieje klasa abstrakcji będąca z nim w bijekcji.

	I	MAX	MIN
$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \ x, y \in (k, k+1]\}$			
$\{(x, y) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{Q}^{\mathbb{R}} : \forall n \in \mathbb{N} \ x^{-1}(n) \sim_m y^{-1}(n)\}$			

8. Dla następującej rodziny indeksowanej $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{N} \ x - y = kn\}$$

proszę obliczyć podane sumy i iloczyny:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n =$$