Lambda rachunek dla kursu Teoria programowania

Marek Zaionc

Universytet Jagielloński

Rachunek lambda.

Termy. Opisy funkcji obliczalnych. Zakładamy istnienie przeliczalnie wielu zmiennych. Reguły formowania termów.

- Zmienne są termami
- jeżeli $M \in \Lambda$ oraz $N \in \Lambda$ to $MN \in \Lambda$ (aplikacja)
- jeżeli $M \in \Lambda$ oraz zmienna $x \in \Lambda$ to $\lambda x.M \in \Lambda$ (abstrakcja)

Notacja.

Term MN_1N_2 oznacza $(MN_1)N_2$

Term $\lambda xy.M$ oznacza $\lambda x.(\lambda y.M)$

Równości na termach.

Dla termu M niech $FV(M)$ oznacza zbiór zmiennych wolnych (nie będących w obszarze działania żadnej λ) występujących w M.

Przykład. $FV((\lambda x.(\lambda y.x))x) = \{x\}$

Podstawienia.

$M[x := N]$ oznacza term powstały z termu M przez wstawienia za każde wolne wystąpienia zmiennej x termu N.

Term domknięty to term bez zmiennych wolnych czyli taki że $FV(M) = \emptyset$

Konwersje.

α konwersja

$$\begin{array}{rcl} M & =_\alpha & M \\ \lambda x.M & =_\alpha & \lambda y.(M[x := y]) \text{ gdy } y \notin FV(M) \end{array}$$

β konwersja

$$
\begin{array}{lcl}
(\lambda x.M)N & \to_\beta & M[x := N] \text{ gdy } \ldots \\
M \to_\beta N & to & \lambda x.M \to_\beta \lambda x.N \\
M \to_\beta N & to & MZ \to_\beta NZ \\
M \to_\beta N & to & ZM \to_\beta ZN
\end{array}
$$

Relacje $\twoheadrightarrow_\beta$ jest domknięciem przechodnim i zwrotnym relacji $\to_\beta \cup =_\alpha$.

Relacje $=_\beta$ jest domknięciem przechodnim symetrycznym i zwrotnym relacji $\to_\beta \cup =_\alpha$.

Term M jest w formie normalnej jeżeli nie ma takiego N że $M \to_\beta N$.

Twierdzenie Churcha Rossera (1936).

Dla dowolnych termów M, N, K takich że $M \twoheadrightarrow_\beta N$ oraz $M \twoheadrightarrow_\beta K$ istnieje term L taki że $N \twoheadrightarrow_\beta L$ oraz $K \twoheadrightarrow_\beta L$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{M} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathsf{N} \arrow[dr] & & \mathsf{K} \arrow[dl] \\
 & \mathsf{L} &
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie (*) Dla dowolnych termów M, N takich że $M =_\beta N$ istnieje term L taki że $N \twoheadrightarrow_\beta L$ oraz $M \twoheadrightarrow_\beta L$.

oraz

Twierdzenie Dla dowolnych termów M, N, K takich że $M \twoheadrightarrow_\beta N$ oraz $M \twoheadrightarrow_\beta K$ oraz N i K są w formie normalnej to $K =_\alpha N$.

Przykłady β redukcji

$I = \lambda x.x$, $\pi_1 = K = \lambda xy.x$, $\pi_2 = K^* = \lambda xy.y$

Pojęcie pary uporządkowanej $\lambda yzx.xyz$ tak że $[P,Q] = \lambda x.xPQ$

Przykłady(*):

$II \twoheadrightarrow_\beta I$, $K(II) \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.(II)$, $K(II) \twoheadrightarrow_\beta KI$

zgodnie z tw Churcha Rossera istnieje taki wspólny term T że $\lambda x.(II) \twoheadrightarrow_\beta T$ oraz $KI \twoheadrightarrow_\beta T$. Tym termem jest w tym przypadku $\lambda x.I$.

$[P,Q]\pi_1 \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.xPQ)\pi_1 \twoheadrightarrow_\beta \pi_1 PQ \twoheadrightarrow_\beta P$

Para nie jest surjektywna dlatego NIE zachodzi

$[M\pi_1, M\pi_2] =_\beta M$

$$\omega = \lambda x.xx$$

$$\Omega = \omega\omega$$

$$\Omega = \omega\omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

Wyrażalność algorytmów w rachunku lambda.

Numerale Churcha.

$\underline{n} = \lambda sx.s(...(sx)...)$

Funkcja $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ jest λ definiowalna jeżeli istnieje taki term domknięty F że dla każdych liczb naturalnych $n_1 \ldots n_k$ zachodzi

$$F\underline{n_1} \ldots \underline{n_k} =_\beta \underline{f(n_1, \ldots, n_k)}$$

Przykładowe termy opisujące funkcje obliczalne.

$\lambda nmsx.ns(msx)$ opisuje dodawanie

$\lambda nmsx.n(\lambda z.msz)x$ opisuje mnożenie

$\lambda nmksx.n(\lambda y.ksy)(msx)$ opisuje

$(n, m, k) \mapsto if\ n = 0\ then\ m\ else\ k$

Twierdzenie (Kleene)

Wszystkie funkcje rekurencyjne są λ definiowalne.

Twierdzenie dowodzi się poprzez zastosowanie termu opisującego operator punktu stałego czyli takiego termu Y że dla dowolnego termu F

$$F(YF) =_\beta YF$$

Przykładowo takim Y może być term

$$Y = \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$$